〔1〕

Ⅰ.

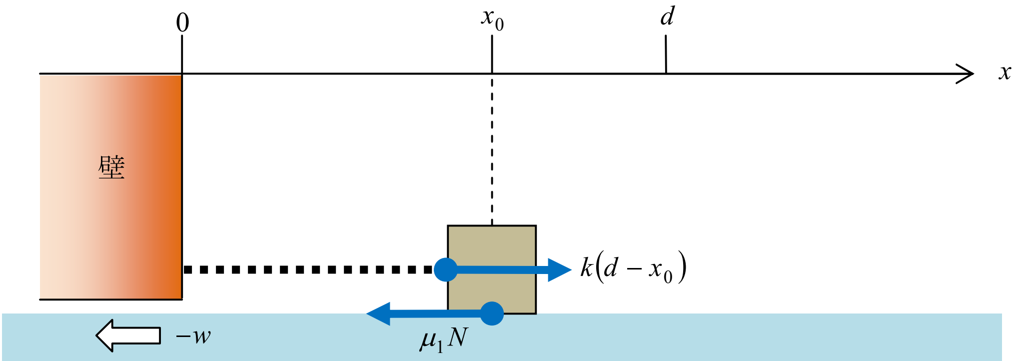
問 1

物体がベルトから受ける静止摩擦力が，ばねから受ける弾性力がつり合いの関係を保ちながら，徐々に大きくなり，それが最大摩擦力となった瞬間，物体はベルトに対し右向きにすべりだす。この一瞬において，物体がベルトから受ける最大摩擦力とばねから受ける弾性力がつり合うから，垂直抗力の大きさを N とすると，

$k(d-x_0)=\mu_1 N$

$N=mg$ より， $k(d-x_0)=\mu_1 mg$

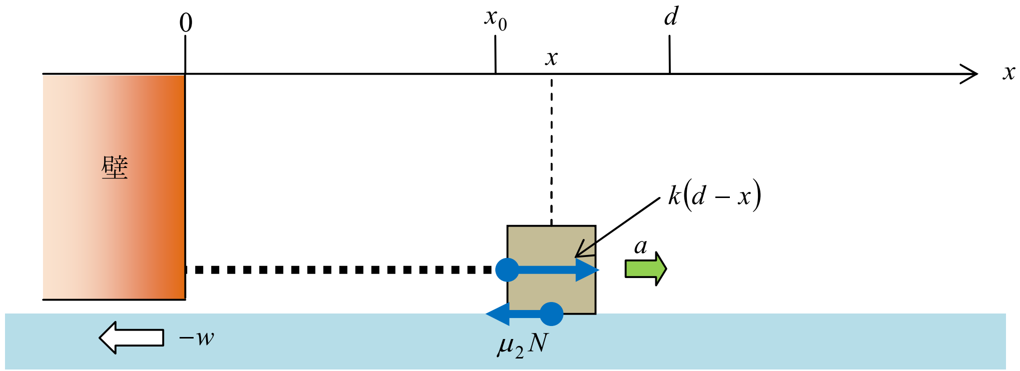
$\therefore x_0=d-\dfrac{\mu_1 mg}{k}$ ・・・(答)



Ⅱ.

問 2

$ma = k(d - x) - \mu_2 mg$ ・・・(答)



問 3

壁にばねをつなぐわけだから，$x = L$ の位置がそのばねの自然長の位置である。
自然長のばねの弾性力は 0 だから，

$k(d - L) - \mu_2 mg = 0$

$\therefore L = d - \dfrac{\mu_2 mg}{k}$ ・・・(答)

問 4

問 2，問 3 より，

$$
\begin{aligned}
ma &= k(d - x) - \mu_2 mg \\
&= -kx + kd - \mu_2 mg \\
&= -k\left\{x - \left(d - \frac{\mu_2 mg}{k}\right)\right\} \\
&= -k(x - L)
\end{aligned}
$$

（$-k$ で括ったのは，右辺が復元力であることを明確にするためである）

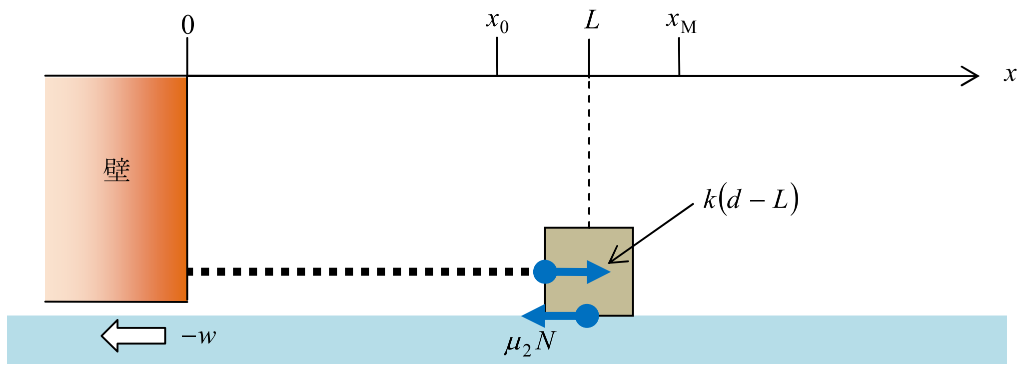
$ma = -kX$ とすると表される運動方程式は，

$X = 0$ を振動中心とする単振動の運動方程式だから，

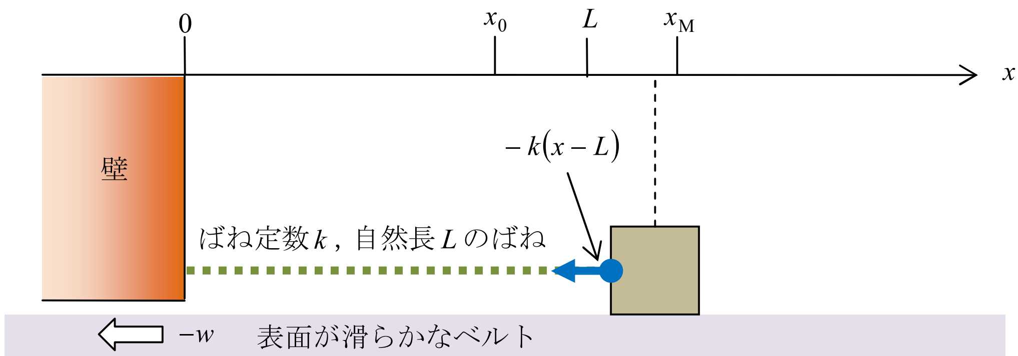
$ma = -k(x - L)$ は $x = L$ を振動中心とする単振動運動を表す。

よって，$x = L$ は振動端点の中点，すなわち x_0 と x_M の中点，すなわち $L = \dfrac{x_0 + x_M}{2}$

$\therefore x_M = 2L - x_0$ ・・・(答)



運動方程式を $ma=-k(x-L)$ とすることにより，
動摩擦力も組み込まれた自然長 L のばねの単振動運動の運動方程式となる。
つまり，物体は摩擦のないベルト上で水平方向に単振動運動をすることになる。
よって，物体の運動とベルトの回転の関係はなくなってしまう。



参照

物理小ネタ：単振動・単振動の力学的エネルギー保存則 7 ページ以降
http://www.toitemita.sakura.ne.jp/buturikoneta.html

問 5

ベルトの速度は $-w$ だから，物体の速度が $-w$ になったとき物体はベルトに対し静止する。

つり合いの位置からの変位 X で表した単振動運動方程式 $ma=-kX$ では，

$$\frac{1}{2}kX^2+\frac{1}{2}mv^2=\text{一定}$$

が成り立つ。

問題の場合， $X=x-L$ だから，

$$\frac{1}{2}k(x-L)^2+\frac{1}{2}mv^2=\text{一定}$$

となる。

そこで， $v=-w$ となる位置を x_{-w} とすると，

$v=0$ となる振動端点 $x=x_0$ との間に，

$$\frac{1}{2}k(x_{-w}-L)^2+\frac{1}{2}m(-w)^2=\frac{1}{2}k(x_0-L)^2+0$$ が成り立つ。

$$\therefore (x_{-w}-L)^2=(x_0-L)^2-\frac{mw^2}{k}$$

$$\therefore x_{-w}-L=\pm\sqrt{(x_0-L)^2-\frac{mw^2}{k}}$$

ここで，

$x_{-w}-L=\sqrt{(x_0-L)^2-\frac{mw^2}{k}}$ なのか $x_{-w}-L=-\sqrt{(x_0-L)^2-\frac{mw^2}{k}}$ なのかが問題になるが，

物体は壁に向かって加速され，振動中心 $x=L$ で最も速くなるが，

ベルトが動く速さが物体の振動中心における速さより速くなってしまうと，

物体がベルトに対して静止できなくなるから，ベルトに対し静止するならば，

ベルトの動く速さは振動中心における物体の速さ以下でなければならない。

よって，

物体は振動中心に達したとき，あるいは，それまでにベルトに対し静止することになる。

つまり，静止位置は L より右ということ，すなわち $x_{-w}-L\geq 0$ ということになる。

ゆえに，

$$x_{-w}-L=\sqrt{(x_0-L)^2-\frac{mw^2}{k}}$$

$$\therefore x_{-w}=L+\sqrt{(x_0-L)^2-\frac{mw^2}{k}}$$ ・・・(答)

Ⅲ.

問 6

問 5 の解説より，ベルトの動く速さが物体の振動中心での速さより速くなると物体はベルトに対し静止することなく単振動運動をすることになる。

よって，求めるベルトの速さ w_C は，物体の振動中心での速さと等しい。

そこで，

$v=0$ となる振動端点 $x=x_0$ と $x=L$ である振動中心について，

$\frac{1}{2}k(x-L)^2+\frac{1}{2}mv^2=$一定 を使うと，

$$0+\frac{1}{2}m{w_C}^2=\frac{1}{2}k(x_0-L)^2+0$$

$$\therefore m{w_C}^2=k(x_0-L)^2$$

ここで，問 1，問 3 より，

$x_0=d-\frac{\mu_1 mg}{k}$， $L=d-\frac{\mu_2 mg}{k}$ だから，

$$x_0-L=-\frac{\mu_1 mg}{k}+\frac{\mu_2 mg}{k}=-(\mu_1-\mu_2)\cdot\frac{mg}{k}$$

よって， $m{w_C}^2=k(\mu_1-\mu_2)^2\cdot\frac{m^2g^2}{k^2}$

w_C は速さだから $w_C\geq 0$

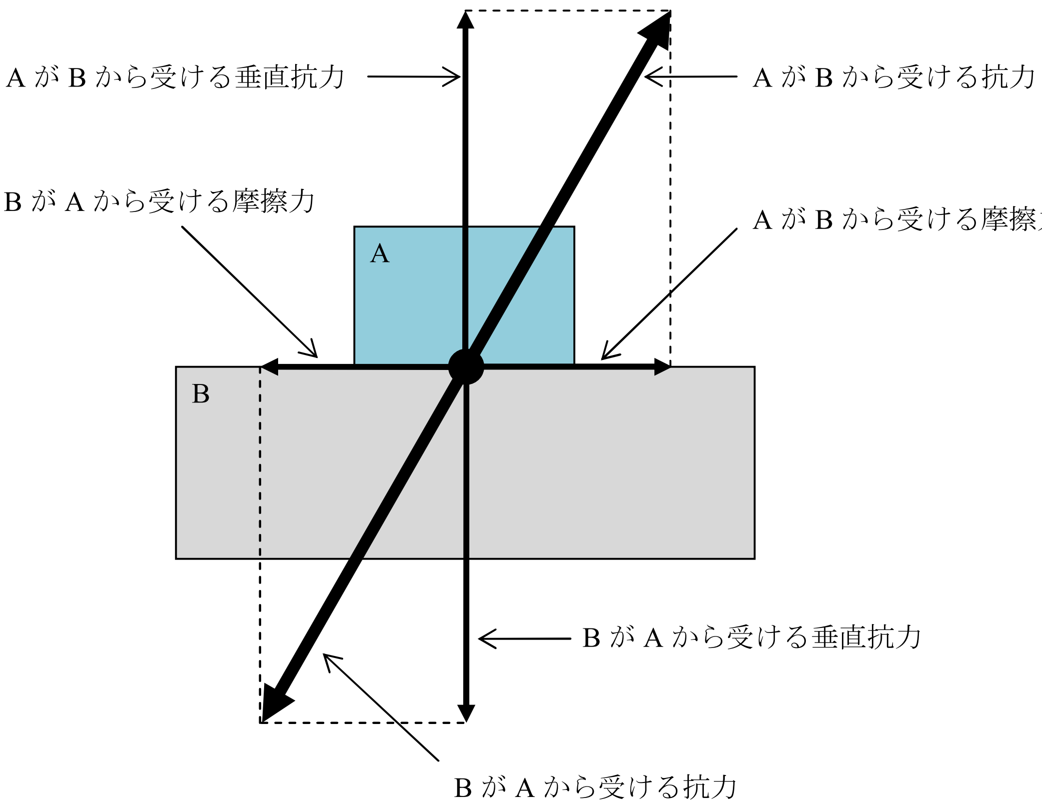
また，条件より $\mu_1>\mu_2$

$$\therefore w_C=(\mu_1-\mu_2)g\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdot\cdot\cdot(答)$$

摩擦力

抗力と摩擦力

2 物体間の接触面に働く抗力の面に平行な分力を摩擦力，垂直な分力を垂直抗力という。
抗力は作用反作用の力なので，その分力の摩擦力と垂直抗力も作用反作用の力である。



静止している物体が接触面に対して平行方向に動きだそうとするのを妨げる摩擦力を
静止摩擦力といい，その大きさが最大のものをとくに最大摩擦力という。
接触面に対し平行方向に運動している物体の運動を妨げる摩擦力を動摩擦力という。
動摩擦力は運動摩擦力ともいう。

静止摩擦力と最大摩擦力

接触面に対し静止している物体を動かそうと接触面に平行な外力を加えても物体が静止し続けるとき，その物体は外力と大きさが同じで向きが真逆の力（静止摩擦力）を接触している物体から受けている。外力を大きくしていくと，小さいときは余裕で静止しているが，やがて耐えきれなくなって物体が動き出す。つまり，外力の大きさが静止摩擦力の大きさの最大値（最大摩擦力）より大きくなり物体が動き出す。

余裕で静止しているとき　：外力の大きさ F ＝静止摩擦力 f

ぎりぎり静止しているとき：外力の大きさ F_0 ＝最大摩擦力 $f_{\max}$

垂直抗力 N と最大摩擦力 $f_{\max}$ の関係

最大摩擦力 $f_{\max}$ は物体の接触物体に対する垂直抗力の大きさに比例する。

垂直抗力は作用反作用の力だから，接触する 2 物体が受ける垂直抗力の大きさは等しい。

摩擦係数

2 物体の接触面の性質と状態で決まる定数で，たとえば，面を磨いたりロウを塗ったりするなどして面を滑らかにすると小さくなる。

摩擦係数には，静止摩擦係数，動摩擦係数，ころがり摩擦係数があり，

それぞれ最大摩擦力，動摩擦力，ころがり摩擦力の比例定数でもある。

静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ'，ころがり摩擦係数を μ'' とすると，

一般に，$\mu > \mu' > \mu''$ が成り立つ。

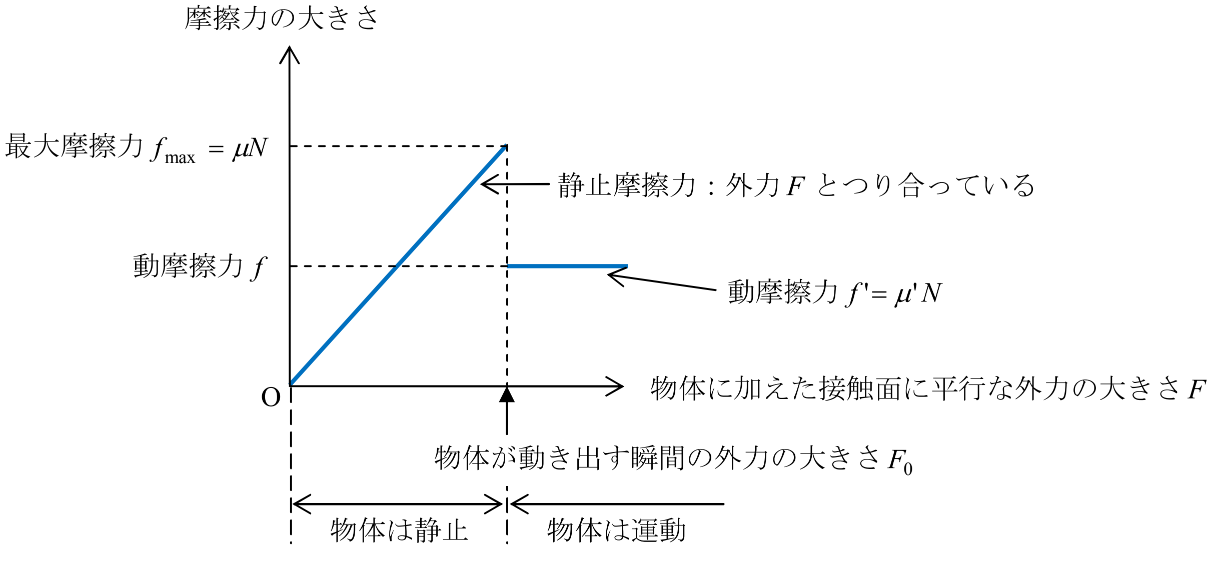
ころがり摩擦力：球や円柱がころがるとき受ける摩擦力

最大摩擦力と動摩擦力の式

垂直抗力を N，静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とすると，

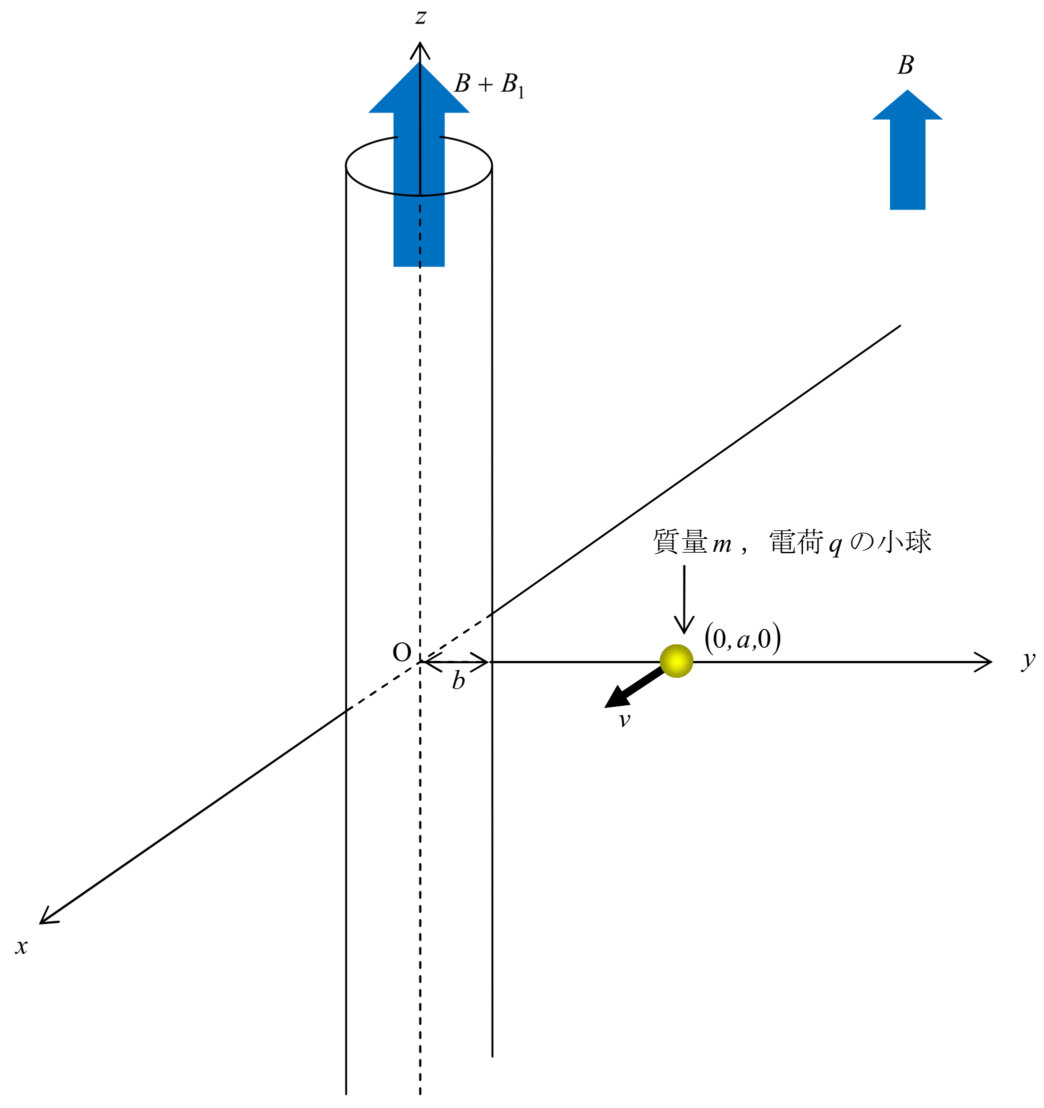
最大摩擦力 $f_{\max} = \mu N$

動摩擦力 $f' = \mu' N$



〔**2**〕

B は全空間に存在している一様な磁界の磁束密度
B_1 はソレノイドがつくる磁界の磁束密度



(1)

正

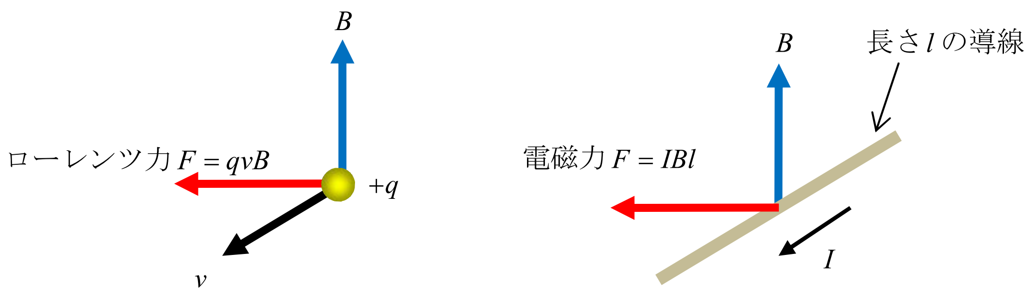
解説

小球が受ける向心力（ローレンツ力）が原点方向だから，電荷 q の符号は正である。

補足

正電荷の移動の向きを導線を流れる電流の向きと対応させると右図となり，

この導線が受ける電磁力の向きと正電荷が受けるローレンツ力の向きが一致する。



(2)

板がなければ，小球は向心力（ローレンツ力） qvB を受け半径 a の等速円運動をする。

このとき運動方程式は $m\dfrac{v^2}{a} = qvB$ だから， $v = \dfrac{qBa}{m}$ ・・・(答)

(3)

小球は，板に垂直に入射する弾性衝突を繰り返すから，

小球の運動は，軌道半径 a の等速半円運動の繰り返しとなる。

よって，数列 $\{R_n\}$ は， $R_1 = a$ ， 公差 $2a$ の等差数列である。

$\therefore R_n = a + (n-1) \cdot 2a$

$\therefore R_n = (2n-1) \cdot a$ ・・・(答)

(4)

衝突の向きは， x 軸に対し垂直方向だから，衝突直前の速度の x 成分は 0 である。

よって，衝突直前の運動量の x 成分は 0 ・・・(答)

(5)

衝突の向きは， x 軸に対し垂直かつ $-y$ 方向だから，速度の y 成分は $-v$

よって，衝突直前の運動量の y 成分は $-mv$

(6)

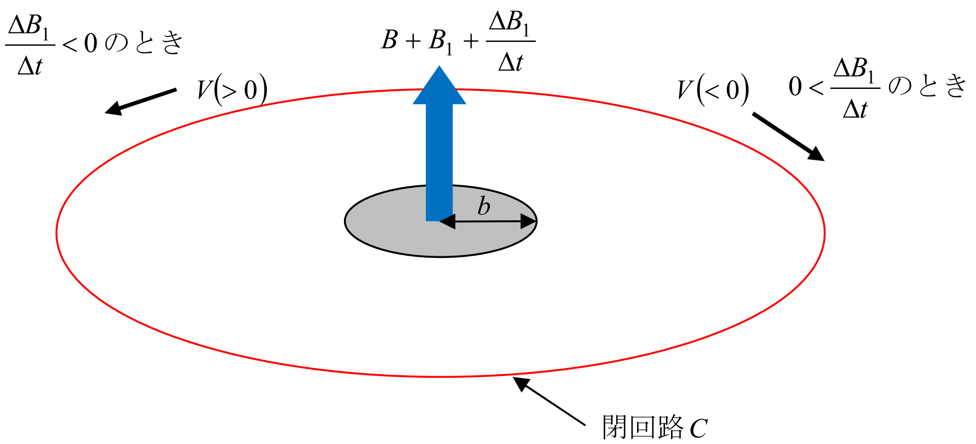
$$|V| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\pi b^2 \frac{\Delta B_1}{\Delta t}\right|$$

レンツの法則より，

$\dfrac{\Delta B_1}{\Delta t} < 0$ のとき，V の向きは反時計回りだから，$0 < V \quad \therefore V = -\pi b^2 \dfrac{\Delta B_1}{\Delta t}$

$0 < \dfrac{\Delta B_1}{\Delta t}$ のとき，V の向きは時計回りだから，$V < 0 \quad \therefore V = -\pi b^2 \dfrac{\Delta B_1}{\Delta t}$

よって，$V = -\pi b^2 \dfrac{\Delta B_1}{\Delta t}$ ・・・(答)



補足

誘導起電力の向きについての約束

閉回路を貫く磁束と同じ向きの磁束を生じる誘導起電力の向きを正とする。

レンツの法則により，磁束の変化を妨げる向きに誘導起電力が発生するから

正の向きの起電力 ($V > 0$) が発生するとき，閉回路を貫く磁束密度変化は $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} < 0$ である。

よって，$V > 0$ であるためには，$-\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ でなければならない。

負の向きの起電力 ($V < 0$) が発生するとき，閉回路を貫く磁束密度変化は $\dfrac{\Delta B}{\Delta t} > 0$ である。

とよって，$V < 0$ であるためには，$-\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$ でなければならない。

以上より，誘導起電力は $V = -S\dfrac{\Delta B}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ で与えられる。

(7)

誘導電場の強さは，閉回路 C の任意の点の接線の向きの電場の強さである。

したがって，$(R_n,0,0)$ の接線は y 方向であることから誘導電場の強さは E である。

これと閉回路 C の長さが $2\pi R_n$ であることから，$V=2\pi R_n E$

$$\therefore E=\frac{V}{2\pi R_n}$$ ・・・(答)

(8)

$$F=qE=q\cdot\frac{V}{2\pi R_n}=\frac{q}{2\pi R_n}\cdot\left(-\pi b^2\frac{\Delta B_1}{\Delta t}\right)=-\frac{qb^2\Delta B_1}{2R_n\Delta t}$$

$$\therefore F\Delta t=-\frac{qb^2\Delta B_1}{2R_n}$$ ・・・(答)

(9)

y 軸方向の小球の運動量変化＝小球が誘導電場から受けた力積

より，

$$0-(-mv)=-\frac{qb^2\Delta B_1}{2R_n}\quad\therefore\Delta B_1=-\frac{2mR_n v}{qb^2}$$

これに $v=\dfrac{qBa}{m}$ を代入することにより，

$$\Delta B_1=-\frac{2mR_n}{qb^2}\cdot\frac{qBa}{m}=-\frac{2R_nBa}{b^2}$$ ・・・(答)

〔3〕

Ⅰ.

(1)

$Q_1 = W_1$

(2)

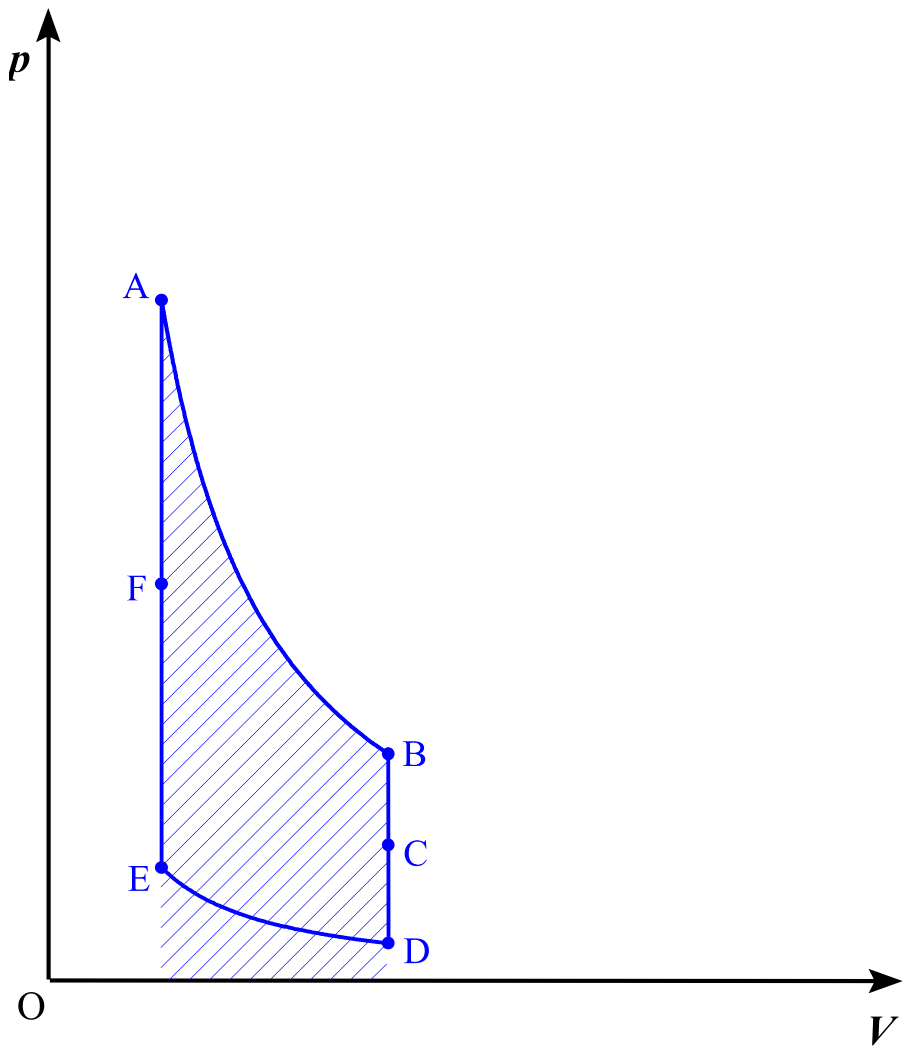
内部エネルギー変化を ΔU_1 とすると，

熱力学第一法則の式は， $Q_1 = \Delta U + W_1$

ところが，等温変化だから， $\Delta T = 0$ より， $\Delta U_1 = nC_V \Delta T = 0$

よって， $Q_1 = W_1$

(3)



Ⅱ.

状態量のメモ（与えられていない状態量は適当に表した）

状態 A$\left(p_{\mathrm{A}}, V_1, n, T_1\right)$，状態 B$\left(p_{\mathrm{B}}, V_2, n, T_1\right)$，状態 C$\left(p_{\mathrm{C}}, V_2, n, T_0'\right)$

(4)・(5)

条件より，シリンダー内の気体は熱量Q_0を失い，蓄熱器の気体は熱量Q_0を得る。

よって，

シリンダー内の気体の熱量変化＝$-Q_0$

蓄熱器の気体の熱量変化＝Q_0

また，いずれも定積変化で気体の仕事は 0 だから，

熱力学第一法則の式は，

蓄熱器の気体：$Q = n_0 C_V \left(T_0' - T_0\right)$

シリンダー内の気体：$-Q = nC_V\left(T_0' - T_1\right)$

$Q + (-Q) = 0$ より，

$n_0 C_V\left(T_0' - T_0\right) + nC_V\left(T_0' - T_1\right) = 0$

$\therefore n_0\left(T_0' - T_0\right) + n\left(T_0' - T_1\right) = 0$

$\therefore T_0'\left(n_0 + n\right) = n_0 T_0 + nT_1$

$\therefore T_0' = \dfrac{n_0}{n_0 + n} \times T_0 + \dfrac{n}{n_0 + n} \times T_1$ ・・・(答)

(6)

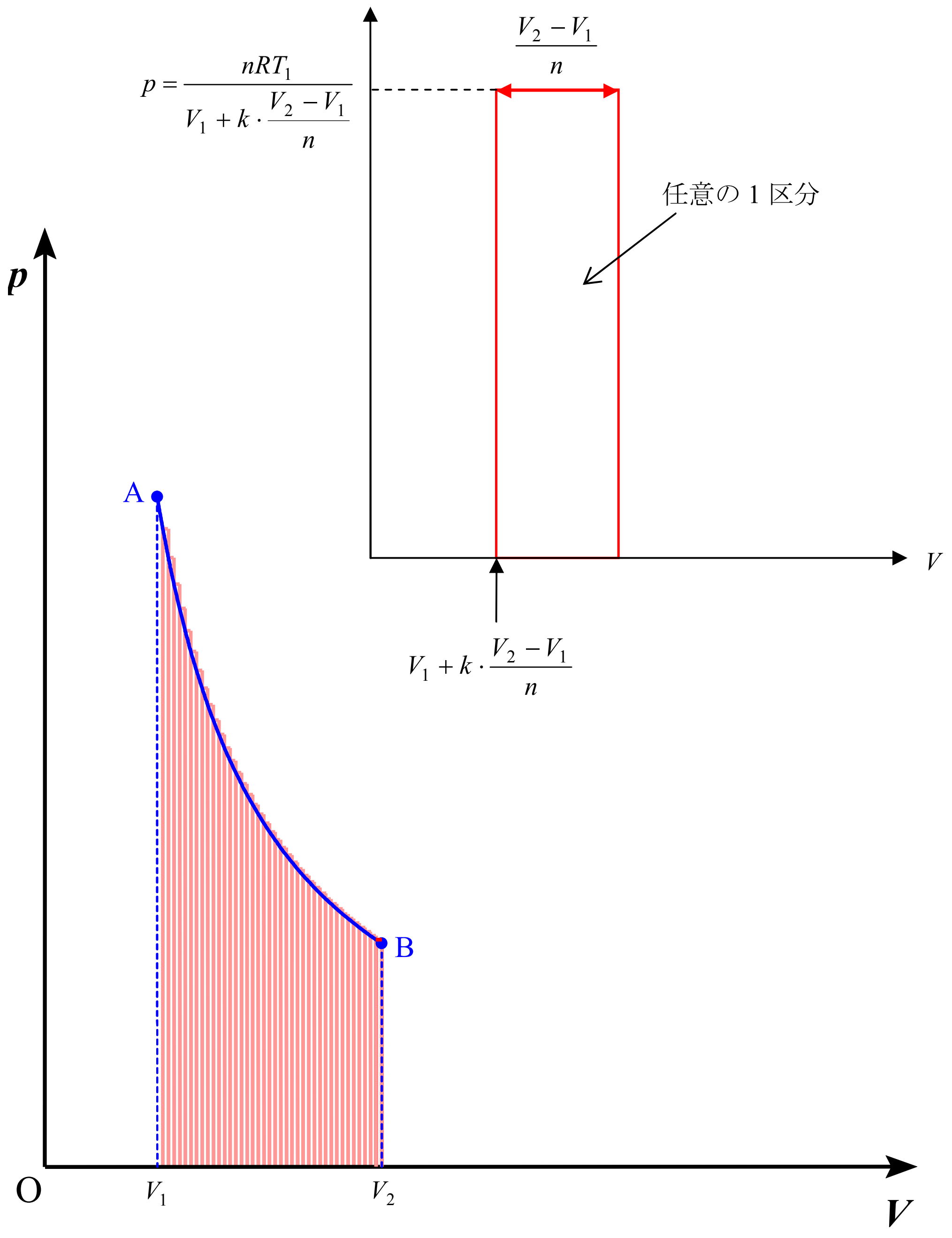
$$
\begin{aligned}
W_1 &= \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \\
&= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\,dV \\
&= nRT_1\left[\log V\right]_{V_1}^{V_2} \\
&= nRT_1 \log\frac{V_2}{V_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_2 &= \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \\
&= \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V}\,dV \\
&= nRT_2\left[\log V\right]_{V_1}^{V_2} \\
&= nRT_2 \log\frac{V_2}{V_1}
\end{aligned}
$$

$\therefore \dfrac{W_2}{W_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$ ・・・(答)

参考：区分求積法

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{V_2-V_1}{n}\cdot\frac{nRT_1}{V_1+k\dfrac{V_2-V_1}{n}}\\
&=\int_0^{V_2-V_1}\frac{nRT_1}{V_1+V}dV\\
&=nRT_1\left[\log(V_1+V)\right]_0^{V_2-V_1}\\
&=nRT_1\log\frac{V_2}{V_1}
\end{aligned}
$$



(7)

$nC_V(T_0 - T_2)$

(8)・(9)

(4)・(5)と同様に,

シリンダー内の気体の熱量変化：$Q_0 = nC_V(T_0 - T_2)$

蓄熱器の気体の熱量変化：$-Q_0 = n_0 C_V(T_0 - T_0')$

より,

$$nC_V(T_0 - T_2) + n_0 C_V(T_0 - T_0') = 0$$

$$\therefore T_0' = \frac{n_0 + n}{n_0} T_0 - \frac{n}{n_0} T_2$$

(4)・(5)より,

$$T_0' = \frac{n_0}{n_0 + n} T_0 + \frac{n}{n_0 + n} T_1$$

よって,

$$\frac{n_0 + n}{n_0} T_0 - \frac{n}{n_0} T_2 = \frac{n_0}{n_0 + n} T_0 + \frac{n}{n_0 + n} T_1$$

$$\downarrow \times n_0(n_0 + n)$$

$$(n_0 + n)^2 T_0 - n(n_0 + n)T_2 = n_0{}^2 T_0 + n_0 n T_1$$

$$n(2n_0 + n)T_0 = n_0 n T_1 + n(n_0 + n)T_2$$

$$\therefore T_0 = \frac{n_0}{2n_0 + n} \times T_1 + \frac{n_0 + n}{2n_0 + n} \times T_2 \quad ・・・(答)$$

(10)

$e(n_0) = \dfrac{W_1 - W_2}{Q_1 + q_2}$, $W_1 = Q_1$, $W_2 = Q_2$, $q_2 = nC_V(T_1 - T_0)$ より,

$$e(n_0) = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + nC_V(T_1 - T_0)}$$

$T_0 = \dfrac{n_0}{2n_0 + n} T_1 + \dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n} T_2$ より, $T_1 - T_0 = \dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n}(T_1 - T_2)$

$$\therefore e(n_0) = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + nC_V \cdot \dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n}(T_1 - T_2)} \quad ・・・①$$

よって, $e_0 = e(0) = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + nC_V(T_1 - T_2)}$ ・・・②

①, ②より,

$$
\begin{aligned}
\frac{e(n_0)}{e_0} &= \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + nC_V \cdot \dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n}(T_1 - T_2)} \cdot \frac{Q_1 + nC_V(T_1 - T_2)}{Q_1 - Q_2} \\
&= \frac{Q_1 + nC_V(T_1 - T_2)}{Q_1 + nC_V \cdot \dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n}(T_1 - T_2)} \\
&= \frac{1 + \dfrac{nC_V}{Q_1}(T_1 - T_2)}{1 + \dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n} \cdot \dfrac{nC_V}{Q_1}(T_1 - T_2)} \\
&= \frac{1 + \alpha(T_1 - T_2)}{1 + \dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n} \times \alpha(T_1 - T_2)}
\end{aligned}
$$

よって，$\dfrac{n_0 + n}{2n_0 + n}$ ・・・(答)